

## Qメータ製作の課題 I (PVC 発生電圧)

Qメータを製作して性能改善する過程で、疑問が出てきたので整理する。

Qを得るため構成した抵抗分割回路と R-L-C 直列回路において、PVC (ポリバリコン；キャパシタ) に発生する共振電圧が理論計算とシミュレーションとで不一致となる。次頁 Fig1-1 回路で考察する。

## 1-1. 直列共振回路

$j\omega L$  と  $1/j\omega C$  で発生する電圧は、共振時互いに位相が逆で打消し合うため、回路に流れる電流はインダクタ起因高周波損失抵抗  $R$  だけで定まり、この時“最大電流”と諸書籍で解説される。

R-L-C 回路の直列インピーダンス  $Z_s$  は

$$Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega C(R + j\omega L) + 1}{j\omega C} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}{j\omega C} \quad \dots \dots \dots 1-1$$

0.5  $\Omega$  端の電圧を  $V_b$  とすると PVC 端電圧は

$$V_C = \frac{V_b}{Z_s} \times \frac{1}{j\omega C} = \frac{V_b \times j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \times \frac{1}{j\omega C} = \frac{V_b}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \quad \dots \dots \dots 1-2$$

共振すると  $1 - \omega^2 LC = 0$  から、

$$V_C = V_b \frac{1}{j\omega CR} \quad \dots \dots \dots 1-3$$

となる。よく知られているように  $Q = \left| \frac{1}{j\omega CR} \right|$  であるから、移項すると

$$Q = \frac{V_C}{V_b} \quad \dots \dots \dots 1-4$$

また、コイルに発生する電圧は

$$V_L = \frac{V_b}{Z_s} \times j\omega L = \frac{V_b \times j\omega C \times j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = V_b \frac{j\omega L}{R} \quad \dots \dots \dots 1-5$$

インダクタ起因高周波損失抵抗  $R$  は、**コイルの直流抵抗だけではない**ことに注意が必要である。

周波数が高くなるほど巻線の表皮効果<sup>1)</sup>により表皮深さ  $d$  が減少する。よって円形断面導体の抵抗  $R$  が増加するから、高周波抵抗が増加しインダクタ起因高周波損失抵抗  $R$  も増加する。一方では  $\omega L$  も

**増加するため、式 1-5 の  $V_L$  は相対的に変化**する。 $\left| \frac{j\omega L}{R} \right|$  は本文式 4-2 の  $Q$  と同じで、コイルに発生する  $V_L$  は  $V_b$  の  $Q$  倍になっている。共振時は  $V_C = V_L$  で、式 1-3 と式 1-5 は同値となる。

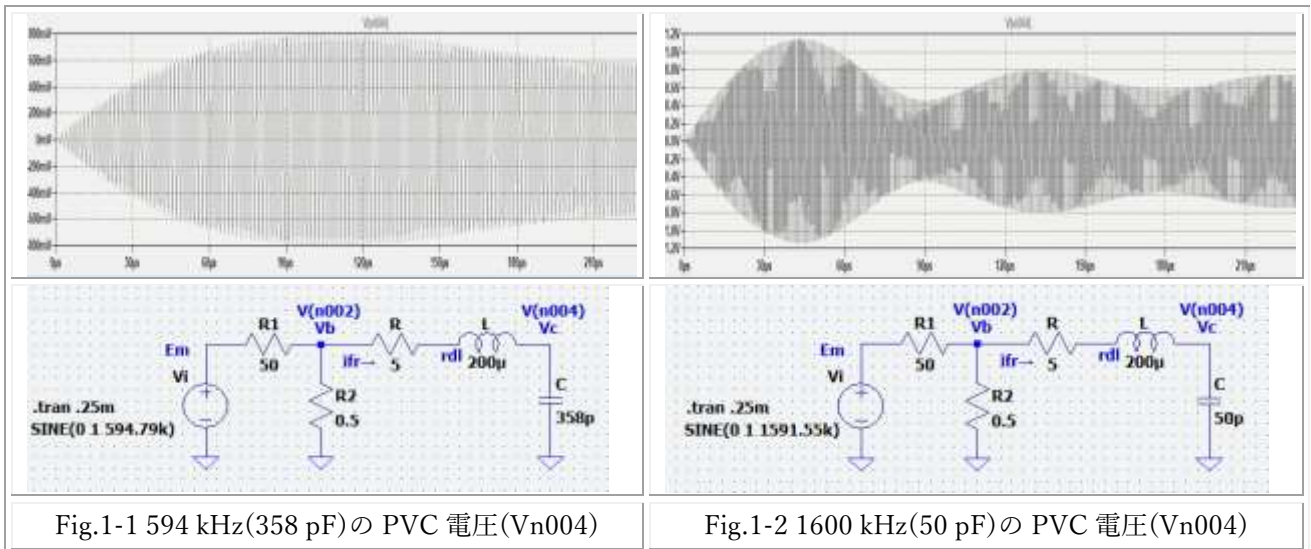
1) 周波数が高くなると、「表皮深さ； $d$ 」が小さくなり電流がより導体の表面を流れるようになるため、交流電気抵抗が増加する（筆者注；このため、高周波では  $Q$  値を高めるためにも線径の太いものが使用される）。

○表皮深さ  $d = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$  ，  $\rho$ ；導体の電気抵抗率，  $\omega$ ；電流の角周波数 ( $2\pi f$ )，  $\mu$ ；導体の絶対透磁率

○円形断面導体の抵抗  $R \cong \frac{\rho}{d} \left( \frac{L}{\pi D} \right)$ ，  $\rho$ ；導体の電気抵抗率，  $d$ ；表皮深さ，  $L$ ；導体の長さ，  $D$ ；導体の径， ( $D \gg d$ )

次頁に LTspice によるシミュレーション結果を示すが、コイルの直流抵抗分  $rdl$  も含む  $R$  には上記 1) の表皮効果を加味していない。加えて PVC の寄生成分も考慮外である。

Fig.1-1, 1-2 に、 $V_b=0.01$  V 時の 594 kHz と約 1 600 kHz の PVC 電圧 ( $V_c$ ;  $V(n004)$ ) を示す。



PVC に発生する電圧は  $\text{ifr} \times \frac{1}{j\omega C}$  となって周波数に依存し、周波数が高くなると PVC の容量変化も伴い  $|\frac{1}{j\omega CR}|$  が大きくなる。具体的に 594 kHz で 747.4  $\Omega$ 、1 600 kHz では 2 k $\Omega$  である (表 1-1)。

$\frac{V_b}{R}$  が一定のため、PVC に発生する電圧は大きくなる筈だが、周波数が変化しても定常値は約 0.6 V 付近に収束する傾向を見せている。1-1.の考え方では何故 PVC 電圧が低いのか説明がつかない。

### 1-2. シミュレーション結果数値を抜粋すると

表 1-1 にシミュレーションによる結果を抜粋する。応答波形にカーソルを当てて数値を読取りしたものが  $V_c(ec)$  と  $\text{ifr}(ic)$  で、本来変化しない筈の  $\text{ifr}(ic)$  が“変化”していることが分かった。

表 1-1 共振周波数におけるキャパシタでの電圧と電流

fr(kHz)	PVC (pF)	$\frac{1}{\omega C}$ ( $\Omega$ )	$V_c, ec$ (V)	ifr, ic (mA)	$R^2$ ( $\Omega$ )	$Q = \frac{1}{\omega CR}$
594.79	358	747.43	1.2 V <sub>p-p</sub> , $\pm 0.6$ V	1.6 mA <sub>p-p</sub> , $\pm 0.8$ V	5	149
795.77	200	1 000	1.3 V <sub>p-p</sub> , $\pm 0.65$ V	1.3 mA <sub>p-p</sub> , $\pm 0.65$ V	7	143
1 591.55	50	2 000	1.15 V <sub>p-p</sub> , $\pm 0.6$ V	0.57 mA <sub>p-p</sub> , $\pm 0.29$ V	14	143

$ec \doteq \frac{1}{\omega C} \times \text{ifr}$ 
2) 本文にあるように単純計算した値

式 1-1 を別表現すると  $Z_s$  は

$$Z_s = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \left( \because fr = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \omega = 2\pi fr \right) \rightarrow Z = R \quad \dots 1-6$$

共振時、ifr は Fig.1-1 の 0.5  $\Omega$  端  $V_b = 0.01$  V を  $R=5$   $\Omega$  で割算した一定電流で、約 2 mA である。

ところが何故か ifr が変化するため、PVC のインピーダンス  $|1/j\omega C|$  と掛算した  $ec$  は、ほぼ一定になる。式 1-6 から  $j\omega L$ 、 $1/j\omega C$  の増加に伴って電流が減少することはない筈だが、起因を R だけにまとめて計算すると、594 kHz ; 5  $\Omega$   $\rightarrow$  1 591 kHz ; 14  $\Omega$  と約 3 倍の変化が生じている。

これに伴い  $Q = \frac{1}{\omega CR} = 149$  となるが、式 1-4 の  $ec$  では  $Q = \frac{ec}{V_b} = 60$  で 2 倍以上の差異が生じる。

R と L と C に特別な素子情報入力・操作はしていないにも係わらず、何故 ifr が変化するのか？

1-3. 共振時の R-L-C 直列回路の静的計算では (その 1)

単純に考えると,  $V_b$  を  $R$  で割算した電流  $i_{fr}$  が流れるため PVC で発生する電圧<sup>3)</sup>は

$$V_c = \frac{V_b}{R} \frac{1}{\omega C} = \frac{E_m}{R_1+R_2} R_2 \frac{1}{R} \frac{1}{\omega C} = \frac{E_m R_2}{(R_1+R_2)R} \frac{1}{\omega C} \dots \dots \dots 1-7$$

となるから, 数値を代入して

$$V_c = \frac{1 \times 0.5}{(50+0.5) \times 5 \times 2 \times \pi \times 594.79 \times 10^3 \times 358 \times 10^{-12}} = \frac{0.5}{0.3378} = 1.48 \text{ V} \dots \dots \dots 1-8$$

を得る。式 1-3 と同じ計算で定常値であるため, これと式 1-4 から

$$Q = \frac{V_c}{V_b} = \frac{1}{\omega C R} = \frac{1.48}{0.01} = 148 \dots \dots \dots 1-9$$

となり表 1-1 の  $\frac{1}{\omega C R}$  と一致するが, Fig.1-1 の定常値 0.6 V からは  $Q = \frac{V_c}{V_b} = 60$  である。

計算上 148 で正しそうだが, シミュレーションでは実物状態の反映はない筈であり, 何故実測定に近いとも言える  $Q=60$  が出るのだろうか?

3)  $R$  は  $R_2$  より大きい (  $R \geq 10 \times R_2$  ),  $V_b$  式を簡略化。電圧計算のため  $\frac{1}{\omega C} = \left| \frac{1}{j\omega C} \right|$  とした。

1-4. 共振時の R-L-C 直列回路の静的計算では (その 2)

改めて Fig.1-3 で,  $R \geq 10 \times R_2$  などを考慮せずにそのままとしてみる。

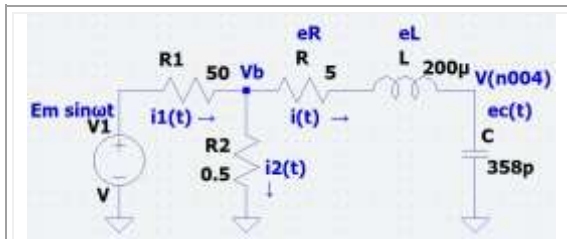


Fig.1-3 抵抗分割と R-L-C 直列回路

電源  $V_1$  からみた回路の総インピーダンスは

$$Z_0 = R_1 + \frac{R_2 \cdot Z_s}{R_2 + Z_s}, \quad Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

総電流  $i_1$  と R-L-C 直列回路に流れる  $i$  は

$$i_1 = \frac{V_1}{Z_0} \rightarrow i = \frac{V_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot Z_s}{R_2 + Z_s}}, \quad i = i_1 \times \frac{R_2}{R_2 + Z_s}$$

$$i = i_1 \times \frac{R_2}{R_2 + Z_s} = \frac{V_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot Z_s}{R_2 + Z_s}} \times \frac{R_2}{R_2 + Z_s} = \frac{V_1 (R_2 + Z_s)}{R_1 (R_2 + Z_s) + R_2 \cdot Z_s} \times \frac{R_2}{R_2 + Z_s} = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 (R_2 + Z_s) + R_2 \cdot Z_s} \dots \dots \dots 1-10$$

$Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$  を代入すると

$$i = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 (R_2 + Z_s) + R_2 \cdot Z_s} = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 R_2 + Z_s (R_1 + R_2)} = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 R_2 + \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) (R_1 + R_2)} = \frac{V_1 \cdot R_2}{\frac{j\omega C R_1 R_2 + (j\omega C R - \omega^2 LC + 1)(R_1 + R_2)}{j\omega C}}$$

$$= \frac{j\omega C \cdot V_1 \cdot R_2}{j\omega C (R_1 R_2 + R(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)(1 - \omega^2 LC))}$$

共振時は  $1 - \omega^2 LC = 0$  ( $\because f = f_r \rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ,  $\omega = 2\pi f_r$ ) より,  $(R_1 + R_2)(1 - \omega^2 LC) = 0$  ゆえ

$$i = \frac{j\omega C \cdot V_1 \cdot R_2}{j\omega C (R_1 R_2 + R(R_1 + R_2))} = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)} \dots \dots \dots 1-11$$

$R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \Omega$ ,  $R = 5 \Omega$ ,  $V_1 = 1 \text{ V}$  とすると

$$i = \frac{1 \times 0.5}{50 \times 0.5 + 5(50 + 0.5)} = \frac{0.5}{277.5} = 0.001802 = 1.802 \text{ mA} \dots \dots \dots 1-12$$

$$\therefore eC = i \times \left| \frac{1}{j\omega CR} \right| = 1.802 \times 10^{-3} \times \frac{1}{2\pi \times 594.79 \times 10^3 \times 358 \times 10^{-12}} = 1.802 \times 10^{-3} \times 747.435 = 1.347 \text{ V} \quad 1-13$$

したがって R-L-C 直列回路側に流れる電流は 1.802 mA , PVC に発生する電圧は 1.347 V となる。  
 $V1 = 1 \text{ V}$  としたが,  $V1 = E_m \sin \omega t = 1 \sin \omega t$  から振幅は  $\pm 1 \text{ V}$  となる。式 1-13 の値は片側振幅を表しており, 実際は  $1.347 \sin(2\pi \cdot fr \cdot t) = 1.347 \sin(2\pi \times 594.79 \times 10^3 \times t)$  から, 振幅は  $\pm 1.347 \text{ V}$  である (2.694 Vp-p)。

また,  $V_b = i \times R = 1.802 \times 10^{-3} \times 5 = 0.00901 = 9 \text{ mV}$  から,

$$Q = \frac{V_c}{V_b} = \frac{1.347}{0.009} = 149.67 \quad \dots \dots \dots 1-14$$

共振時, 式 1-11 から明らかなように R-L-C 直列回路に流れる  $i$  の最大値は周波数に依存しない。  
 表 1-1 の  $i_f(i_c)$ ,  $V_c(e_c)$  はシミュレーション結果のグラフから読取りしたものだが, 前者は周波数で変化し, 後者は大きな変化はなく理論に反する結果となっている。

他方  $Q$  は式 1-9, 式 1-14 でほぼ同値で表 1-1 でも一致しており, その  $fr$  と  $C$  での**理論上の最高値になる**と思われる。**何故  $i_c$  が変化し,  $e_c$  は変化しない振舞いになるのか, 現時点で不明である。**

逆にシミュレーションでは**何らかの原因で  $i_c$  が変化するため**,  $e_c$  と  $Q$  が一定になっているとも言え

そうだ。そうでなければ周波数が高くなると  $\left| \frac{1}{j\omega C} \right|$  は大きくなるから  $V_c$  は増加し, 式 1-13 から  $Q$  も

大きくなる筈である。

2 頁でも記載したように表皮効果などに起因する  $R$  が増加するような素子情報が背後で設定されているのだろうか?

引き続き推考していく (Q メータ製作の課題 II に続く)。