2.抵抗分割回路と R-L-C 直列回路

Fig.2-1 の回路の伝達関数をブロック線図から求める。

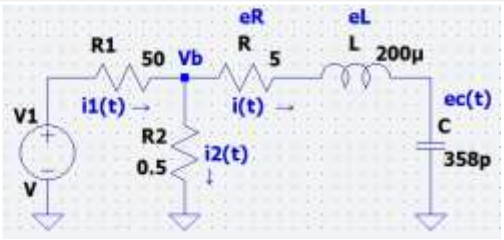


Fig.2-1 抵抗分割した R-L-C 直列回路

1.R，L，C の構成により，二階の微分方程式となる。この伝達関数を求めるため，ブロック線図を作成する。
後の利用のため，抵抗分割の R1 と R2 を追加した。

2.初期値は全て 0 とする。

3.素子はラプラス変換表現する。

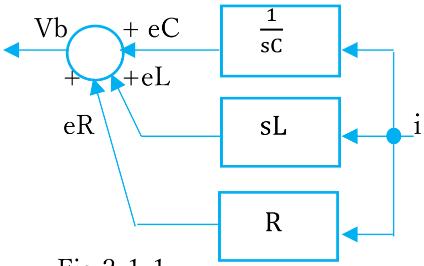


Fig.2-1-1

① Fig.2-1 の記号との対応で，i , Vi などはそのままとする（最後で I(s)，Vi(s) と訂正）。

② R-L-C 直列回路に流れる電流 i と各素子を掛算してそれぞれに発生する電圧を求める。

③ 求めた eC，eL，eR を足算して Vb を求める。

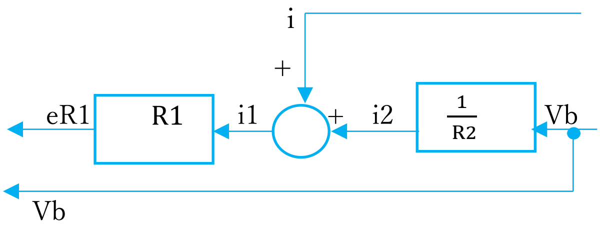


Fig.2-1-2

④ Vb を R2 で割算すれば i2 になる。

⑤ i2 に i を加算すると i1 になる。

⑥ i1 を R1 と掛算すれば R1 での電圧 eR1 が求まる。

⑦ Vb が次のブロックで必要になるので，延長しておく。

⑧ VR1 と Vb を加算すると Vi が求まる。

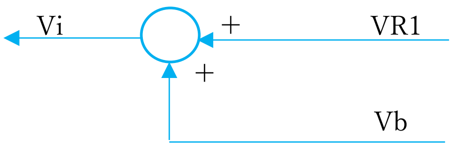


Fig.2-1-3

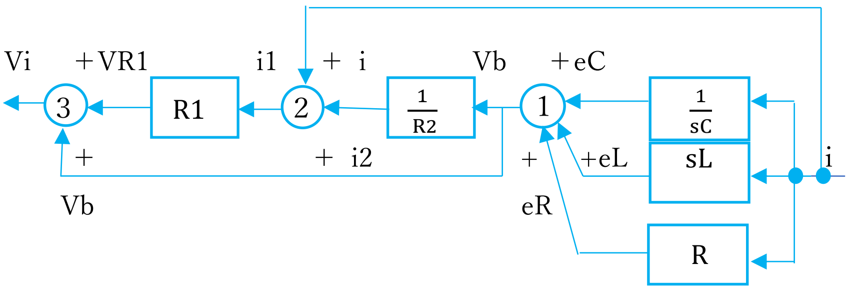


Fig.2-1-4

⑨ 以上 3 線図を結合して全体のブロック線図を得る。
これを Vi → i 方向へとブロック線図を逆転すれば，
$\frac{I(s)}{Vi(s)}$ の伝達関数が求まる。

Fig.2-1-4 を簡略化して一つのブロック図で表すようにする。

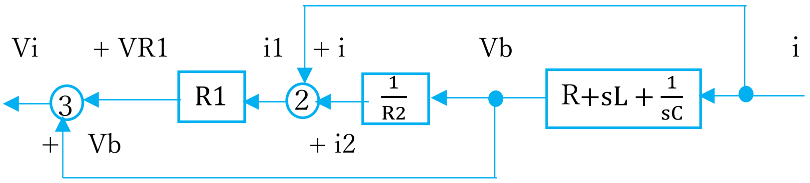


Fig.2-1-5

⑩ Vb は $i \times (R+sL+\frac{1}{sC})$ なので Fig.2-1-4 の i から主線路 ① 側までは一括りにする。

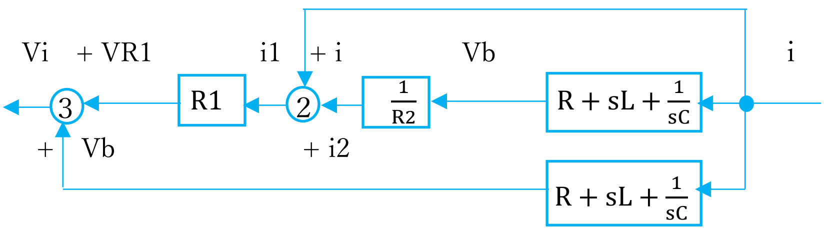


Fig.2-1-6

⑪ Fig.2-1-5 下傍線経路にある Vb も i から得るよう変更する。
i2 は $\mathrm{Vb} \times \frac{1}{R2}$ である。

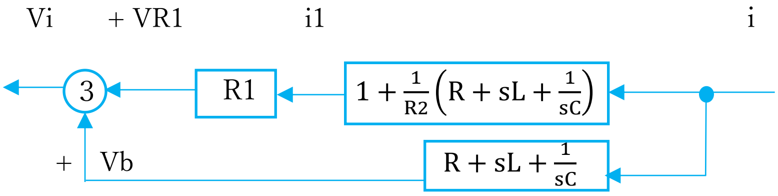


Fig.2-1-7

⑫ Fig.2-1-6 主線路の ② で i1 と i2 が加算されて i1 になるので線図を合成する。
i1=i+i2, $i2 = \mathrm{Vb} \times \frac{1}{R2}$

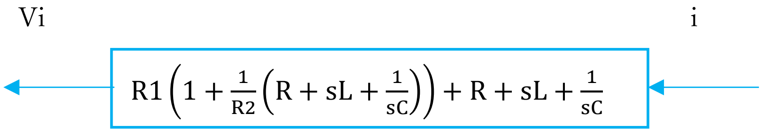
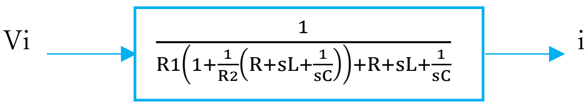


Fig.2-1-8

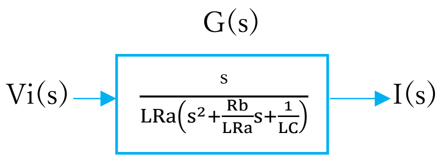
⑬ VR1 と Vb を加算して Vi になるので, 上下の線図を合成する。



$$\frac{1}{R1\left(1+\frac{1}{R2}\left(R+sL+\frac{1}{sC}\right)\right)+R+sL+\frac{1}{sC}}$$

Fig.2-1-9

⑭ ブロック線図を逆転させて Vi から i を得るように方向を変える。ブロック内部の式を整理して, Vi(s) から I(s)への伝達関数を得る。



$$\frac{s}{LRa\left(s^2+\frac{Rb}{LRa}s+\frac{1}{LC}\right)}$$

Fig.2-1-10

⑮ ブロック線図の最終形と伝達関数が得られた。
Vi → Vi(s), i → I(s) として関係諸式を以下に示す。

$\mathrm{Ra} = 1 + \frac{R1}{R2}$, $\mathrm{Rb} = \mathrm{RaR} + \mathrm{R1}$, 分母は二次方程式の根から

$$s1 = -\frac{Rb}{2LRa} + \sqrt{\left(\frac{Rb}{2LRa}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad , \quad s1 = -\frac{Rb}{2LRa} - \sqrt{\left(\frac{Rb}{2LRa}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

を用いて因数分解できる。

得られた伝達関数 G(s)と⑮の関係式からラプラス逆変換で Vi(t) → i(t)を求める。

改めて以下に諸式を示す。

$$G(s)=\frac{I(s)}{Vi(s)}=\frac{1}{LRa}\frac{s}{s^2+\frac{Rb}{LRa}s+\frac{1}{LC}} \quad ・・・\ 2\text{-}1 \qquad 但し\quad Ra=1+\frac{R1}{R2}\ ,\ \ Rb=RaR+R1$$

$$s1=-\frac{Rb}{2LRa}+\sqrt{\left(\frac{Rb}{2LRa}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha+\beta \quad ・・・2\text{-}2\ ,\quad s2=-\frac{Rb}{2LRa}-\sqrt{\left(\frac{Rb}{2LRa}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha-\beta \quad ・・・2\text{-}3$$

電源電圧を$Vi(t)=Vi$（直流）とするとそのラプラス変換は $\frac{Vi}{s}$ ゆえ，キャパシタに発生する電圧 $Ec(s)$は

$$Ec(s)=Vi(s)G(s)\frac{1}{sC}=\frac{Vi}{s}\frac{1}{LRa}\frac{s}{s^2+\frac{Rb}{LRa}s+\frac{1}{LC}}\frac{1}{sC}=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s^2+\frac{Rb}{LRa}s\right)+\frac{1}{LC}}=\frac{Vi}{LCRa}\left\{\frac{1}{2\beta}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)\right\}$$

$$\therefore\ Ec(s)=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right) \qquad ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・\ 2\text{-}4$$

式 2-4 をラプラス逆変換して Ec(t)を求める。ここでは，“部分分数”に分解して逆変換を行う。

$$Ec(s)=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}\right)-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)\right\} \qquad ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・\ 2\text{-}5$$

$$\mathcal{L}^{-1}Ec(s)=\mathcal{L}^{-1}\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}\right)-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)\right\}$$

$$=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left(1-e^{(-\alpha+\beta)t}\right)-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(1-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)\right\}$$

$$ec(t)=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{(\alpha+\beta)\left(1-e^{(-\alpha+\beta)t}\right)-(\alpha-\beta)\left(1-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right\}=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\alpha+\beta-(\alpha+\beta)e^{(-\alpha+\beta)t}-(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)e^{(-\alpha-\beta)t}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right\}$$

$$=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{2\beta-\alpha\left(e^{(-\alpha+\beta)t}-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)-\beta\left(e^{(-\alpha+\beta)t}+e^{(-\alpha-\beta)t}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right\}=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{2\beta-\alpha e^{-\alpha t}\left(e^{\beta t}-e^{-\beta t}\right)-\beta e^{-\alpha t}\left(e^{\beta t}+e^{-\beta t}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right\}$$

$$=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\left(2\beta-2\alpha e^{-\alpha t}\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}-2\beta e^{-\alpha t}\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{2\beta}\frac{2\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh\beta t-e^{-\alpha t}\cosh\beta t\right)$$

$$\therefore\quad ec(t)=\frac{Vi}{LCRa}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(1-\ e^{-\alpha t}\cosh\beta t-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh\beta t\right) \qquad ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2\text{-}6$$

$\beta<0$ の場合；$\beta=j\omega1$ ，$\omega1=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{Rb}{2LRa}\right)^2}$ ，$\cosh\beta t\rightarrow\cos\omega1t$ ，$\sinh\beta t\rightarrow\sin\omega1t$ と置き換える。

【具体例】

$Ra=101$ ，$Rb=555$ ，$\alpha=1.373\,762\times10^4$ ，$\omega1=3.73\,715\times10^6$ ，初動時 t=1 μs には定常値 10 mV を中心として約 2 倍の過渡電圧が発生する（Fig.2-12）。

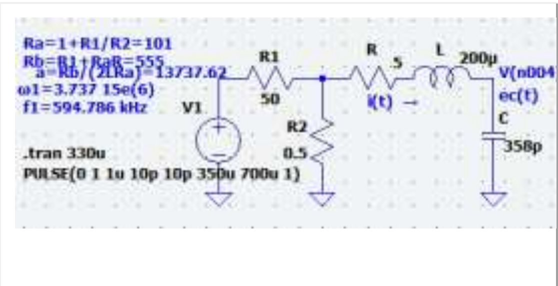


Fig.2-11 R-L-C 直列回路（Vi= 1 V）

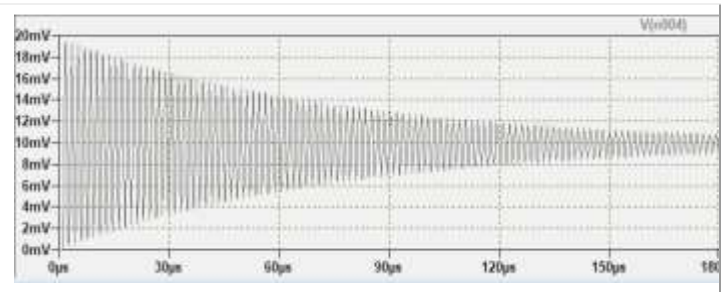


Fig.2-12 R-L-C 直列回路 ec(t)の過渡応答

改めて以下に諸式を再掲して電源電圧が交流の場合の過渡応答を求める。

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{I(s)}}{\mathrm{Vi(s)}} = \frac{1}{\mathrm{LRa}}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+\frac{\mathrm{Rb}}{\mathrm{LRa}}\mathrm{s}+\frac{1}{\mathrm{LC}}} \quad \cdot\cdot\cdot \quad 2\text{-}1 \qquad 但し \quad \mathrm{Ra} = 1+\frac{\mathrm{R1}}{\mathrm{R2}}\ ,\ \mathrm{Rb} = \mathrm{RaR}+\mathrm{R1}$$

$$\mathrm{s1} = -\frac{\mathrm{Rb}}{2\mathrm{LRa}} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Rb}}{2\mathrm{LRa}}\right)^2 - \frac{1}{\mathrm{LC}}} = -\alpha+\beta \quad \cdot\cdot\cdot\ 2\text{-}2\ ,\ \mathrm{s2} = -\frac{\mathrm{Rb}}{2\mathrm{LRa}} - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Rb}}{2\mathrm{LRa}}\right)^2 - \frac{1}{\mathrm{LC}}} = -\alpha-\beta \quad \cdot\cdot\cdot\ 2\text{-}3$$

電源電圧を$\mathrm{Vi(t)} = \mathrm{Em}\sin\omega\mathrm{t}$とするとそのラプラス変換は $\frac{\mathrm{Em}\omega}{\mathrm{s}^2+\omega^2}$，キャパシタに発生する電圧 Ec(s)は

$$\mathrm{Ec(s)} = \mathrm{Vi(s)G(s)}\frac{1}{\mathrm{sC}} = \frac{\mathrm{Em}\omega}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{\mathrm{LRa}}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+\frac{\mathrm{Rb}}{\mathrm{LRa}}\mathrm{s}+\frac{1}{\mathrm{LC}}}\frac{1}{\mathrm{sC}} = \frac{\mathrm{Em}\omega}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{\left(\mathrm{s}^2+\frac{\mathrm{Rb}}{\mathrm{LRa}}\mathrm{s}\right)+\frac{1}{\mathrm{LC}}} = \frac{\mathrm{Em}\omega}{\mathrm{LCRa}}\left\{\frac{1}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha+\beta)} - \frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha-\beta)}\right)\right\}$$

$$\therefore\ \mathrm{Ec(s)} = \frac{\mathrm{Em}\omega}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\left(\frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha+\beta)} - \frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha-\beta)}\right) \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ 2\text{-}7$$

式 2-7 をラプラス逆変換して Ec(t)を求める。

$$\mathrm{Ec(s)} = \frac{\mathrm{Em}\omega}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha+\beta)} - \frac{1}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha-\beta)}\right)\ ,\ \mathrm{a} = -\alpha+\beta,\ \mathrm{b} = -\alpha-\beta$$として“たたみこみ”を行う。

$$\mathcal{L}^{-1}\mathrm{Ec(s)} = \mathcal{L}^{-1}\frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left(\frac{\omega}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha+\beta)} - \frac{\omega}{\mathrm{s}^2+\omega^2}\frac{1}{\mathrm{s}-(-\alpha-\beta)}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left(\int_0^{\mathrm{t}}\sin\omega\tau * \mathrm{e}^{\mathrm{a(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau - \int_0^{\mathrm{t}}\sin\omega\tau * \mathrm{e}^{\mathrm{b(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau\right) \quad , \quad *；たたみこみ掛算記号$$

$$\mathrm{ec(t)} = \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\int_0^{\mathrm{t}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{a(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau - \int_0^{\mathrm{t}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{b(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{at}}\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{a}+\mathrm{j}\omega)\tau}-\mathrm{e}^{(-\mathrm{a}-\mathrm{j}\omega)\tau}}{2\mathrm{j}}\mathrm{d}\tau - \int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{bt}}\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{b}+\mathrm{j}\omega)\tau}-\mathrm{e}^{(-\mathrm{b}-\mathrm{j}\omega)\tau}}{2\mathrm{j}}\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{at}}}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{-\mathrm{a}+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(-\mathrm{a}+\mathrm{j}\omega)\tau} - \frac{1}{-\mathrm{a}-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(-\mathrm{a}-\mathrm{j}\omega)\tau}\right]_0^{\mathrm{t}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{bt}}}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{-\mathrm{b}+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(-\mathrm{b}+\mathrm{j}\omega)\tau} - \frac{1}{-\mathrm{b}-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(-\mathrm{b}-\mathrm{j}\omega)\tau}\right]_0^{\mathrm{t}}\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{at}}}{2\mathrm{j}}\frac{1}{\mathrm{a}^2+\omega^2}\left[(-\mathrm{a}-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(-\mathrm{a}+\mathrm{j}\omega)\tau} - (-\mathrm{a}+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(-\mathrm{a}-\mathrm{j}\omega)\tau}\right]_0^{\mathrm{t}}\right\}$$

$$- \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{bt}}}{2\mathrm{j}}\frac{1}{\mathrm{b}^2+\omega^2}\left[(-\mathrm{b}-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(-\mathrm{b}+\mathrm{j}\omega)\tau} - (-\mathrm{b}+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(-\mathrm{b}-\mathrm{j}\omega)\tau}\right]_0^{\mathrm{t}}\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{at}}}{2\mathrm{j}}\frac{1}{\mathrm{a}^2+\omega^2}\left[-\mathrm{ae}^{-\mathrm{at}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right) - \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right) - \left(-\mathrm{a}-\mathrm{j}\omega-(-\mathrm{a}+\mathrm{j}\omega)\right)\right]\right\}$$

$$- \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{bt}}}{2\mathrm{j}}\frac{1}{\mathrm{b}^2+\omega^2}\left[-\mathrm{be}^{-\mathrm{bt}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right) - \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right) - \left(-\mathrm{b}-\mathrm{j}\omega-(-\mathrm{b}+\mathrm{j}\omega)\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{at}}}{2\mathrm{j}}\frac{1}{\mathrm{a}^2+\omega^2}\left[\left(-\mathrm{ae}^{-\mathrm{at}}2\mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}}{2\mathrm{j}} - \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}}{2}\right) + 2\mathrm{j}\omega\right]\right\}$$

$$- \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{bt}}}{2\mathrm{j}}\frac{1}{\mathrm{b}^2+\omega^2}\left[\left(-\mathrm{be}^{-\mathrm{bt}}2\mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}}{2\mathrm{j}} - \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}}{2}\right) + 2\mathrm{j}\omega\right]\right\}$$

$$\therefore\quad \mathrm{ec(t)} = \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{(-\alpha+\beta)^2+\omega^2}\left[-(-\alpha+\beta)\sin\omega\mathrm{t} - \omega\cos\omega\mathrm{t} + \omega\mathrm{e}^{(-\alpha+\beta)\mathrm{t}}\right]\right\}$$

$$- \frac{\mathrm{Em}}{\mathrm{LCRa}}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{(-\alpha-\beta)^2+\omega^2}\left[-(-\alpha-\beta)\sin\omega\mathrm{t} - \omega\cos\omega\mathrm{t} + \omega\mathrm{e}^{(-\alpha-\beta)\mathrm{t}}\right]\right\} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ 2\text{-}8$$

電源電圧が時間と共に変化するため，複雑な式となった。