240406

R-L-C 回路の過渡応答 I

R-L-C 直列回路の過渡電流を微分方程式からラプラス変換・逆変換で求め，ブロック線図を示す。

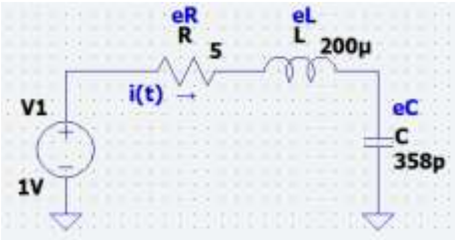

Fig.1-1 R-L-C 直列回路

回路に流れる電流を i(t)とすると式 1-1 が成り立つ。

$$-Ri(t)-L\frac{di(t)}{dt}-\frac{1}{C}\int i(t)dt+V1=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad 1\text{-}1$$

初期値を全て 0 とし，両辺をラプラス変換すると

$$RI(s)+sLI(s)+\frac{1}{sC}I(s)=\frac{V1}{s} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1\text{-}2$$

式 1-2 から I(s)を求める。式 1-2 を変形して

$$\left(R+sL+\frac{1}{sC}\right)I(s)=\frac{V1}{s} \rightarrow \left(\frac{s\,CR+s^2LC+1}{sC}\right)I(s)=\frac{V1}{s} \rightarrow LC\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)I(s)=V1C \rightarrow I(s)=\frac{V1}{L}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

二次方程式の根から $s1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha+\beta$ ，$s1=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha-\beta$ として

$$I(s)=\frac{V1}{L}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{V1}{L}\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1\text{-}3$$

両辺をラプラス逆変換して i(t)を求めると

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{V1}{L}\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)=\frac{V1}{L}\frac{1}{2\beta}\left(e^{(-\alpha+\beta)t}-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)=\frac{V1}{L}\frac{1}{\beta}\left(\frac{e^{(-\alpha+\beta)t}-e^{(-\alpha-\beta)t}}{2}\right)=\frac{V1}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t$$

$$\therefore\ i(t)=\frac{V1}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1\text{-}4$$

β の根号内が $\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}>0$ である場合は，制動的な波形となる。

β の根号内が $\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}<0$ の場合は

$$s1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha+j\beta,\ s1=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha-j\beta \text{ から}$$

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{V1}{L}\frac{1}{2j\beta}\left(\frac{1}{s-(-\alpha+j\beta)}-\frac{1}{s-(-\alpha-j\beta)}\right)=\frac{V1}{L}\frac{1}{2j\beta}\left(e^{(-\alpha+j\beta)t}-e^{(-\alpha-j\beta)t}\right)=\frac{V1}{L}\frac{1}{\beta}\left(\frac{e^{(-\alpha+j\beta)t}-e^{(-\alpha-j\beta)t}}{2j}\right)$$

$$\therefore\ i(t)=\frac{V1}{\beta L}e^{-\alpha t}\sin\beta t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1\text{-}5$$

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=\beta=j\omega1 \rightarrow \omega1=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad \because\ \omega1=\frac{1}{j}\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \rightarrow \omega1=\frac{1}{j}\sqrt{j^2\left(\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)}$$

と置き換えすると式 1-6 を得る。

$$\therefore\ i(t)=\frac{V1}{\omega1L}e^{-\alpha t}\sin\omega1t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1\text{-}6$$

こちらは $e^{-\alpha t}$ の包絡線に沿って角周波数 ω1 で減衰振動する波形となる。

【具体例】

R＝ 5 Ω，L＝200 μH，C＝358 pF , V1＝ 1 V（直流電源）として手計算すると

$\alpha=\frac{R}{2L}=$ 12 500 （時定数 τ ＝80 μs），$\beta<0$ で $\omega 1=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=3.737\,1\times10^6$ （角周波数

f1=594.79 kHz），$\frac{V1}{\omega 1L}=1.34$ mA の減衰振動電流となる。

シミュレーション条件は Fig.1-2，過渡応答は Fig.1-3 となり計算結果と一致している。

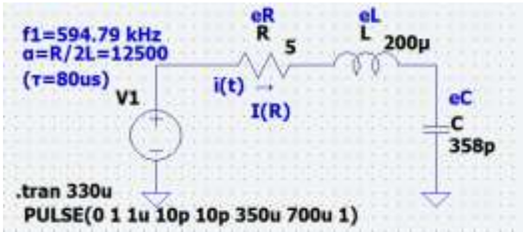

Fig.1-2 R-L-C 直列回路（V1＝ 1 V）

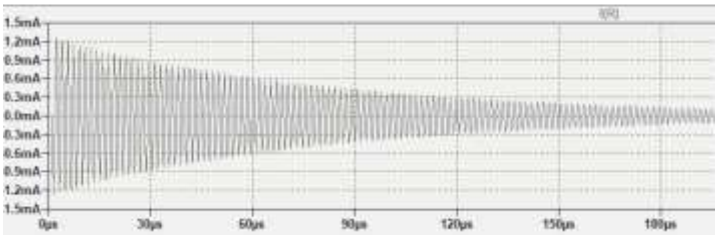

Fig.1-3 R-L-C 直列回路 i(t)の過渡応答

次に，Fig.1-1 で電源電圧 V1 から電流 i へのブロック線図作成手順を示す。

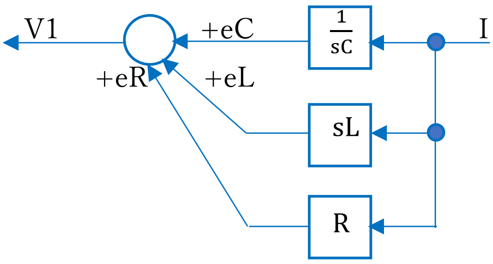

Fig.1-4-1

① R-L-C 直列回路なので，キャパシタ C に流れる電流 I と各素子を掛算して加算すると V1 となる。

eC；キャパシタに発生する電圧

eL；インダクタに発生する電圧

eR；抵抗に発生する電圧

これらを加算する線図が Fig.1-4-1 である。

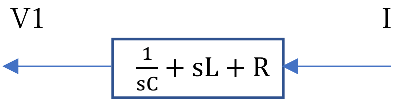

Fig.1-4-2

② 電流 I に対して各素子の関与は加算となるため，左図のように簡略化できる。

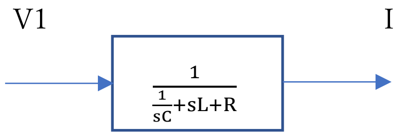

Fig.1-4-3

③ 線図を V1 から I へと逆転させると電圧 V1 から電流 I への伝達関数となる。

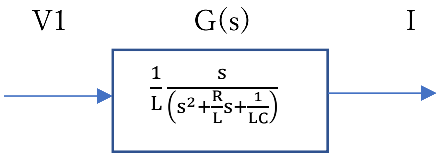

Fig.1-4-4

④ 整理して式 1-3 と同じ伝達関数 G(s)を得る。

分母を因数分解して

$$s1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}\;,\quad s2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

から式 1-3 の運算を行う。