# R-L-C 回路の過渡応答Ⅱ

「R-L-C 回路の過渡応答Ⅰ」に続き，キャパシタで発生する電圧 ec(t)を求める。
キャパシタで発生する電圧 ec(t)は，ラプラス変換後は V1 から i への伝達関数 G(s)と $\frac{1}{sC}$ を掛算するか，または本稿 4 頁 Fig.1-10 の Ga(s)を用いて運算し，ラプラス逆変換で求める。

$$Ec(s)=\frac{1}{sC}\cdot V1(s)\cdot G(s)=\frac{1}{sC}I(s)=\frac{1}{sC}\cdot\frac{V1}{s}\cdot\frac{1}{L}\frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}\ ,\ \text{または}\ Ec(s)=V1(s)\cdot Ga(s)=\frac{V1}{s}\cdot\frac{1}{LC}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

$$Ec(s)=\frac{1}{sC}\frac{V1}{L}\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}\right)-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)\right\}\quad\cdots\cdots\cdot 1\text{-}7$$

$$ec(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha+\beta)}\right)-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-(-\alpha-\beta)}\right)\right\}$$

$$=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\alpha-\beta}\left(1-e^{(-\alpha+\beta)t}\right)-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(1-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)\right\}$$

$$=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\left[(\alpha+\beta)\left(1-e^{(-\alpha+\beta)t}\right)-(\alpha-\beta)\left(1-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha+\beta-(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)e^{(-\alpha+\beta)t}+(\alpha-\beta)e^{(-\alpha-\beta)t}\right]$$

$$=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[2\beta-\alpha\left(e^{(-\alpha+\beta)t}-e^{(-\alpha-\beta)t}\right)-\beta\left(e^{(-\alpha+\beta)t}+e^{(-\alpha-\beta)t}\right)\right]$$

$$=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[2\beta-2\alpha e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}\right)-2\beta\left(\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{V1}{LC}\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[2\beta\left(1-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}\right)-\left(\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}\right)\right)\right]=\frac{V1}{LC}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}\right)-\left(\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}\right)\right)$$

$$\therefore\ ec(t)=\frac{V1}{LC}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh\beta t-e^{-\alpha t}\cosh\beta t\right)=\frac{V1}{LC}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(1-e^{-\alpha t}\left(\cosh\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sinh\beta t\right)\right)\quad\cdots 1\text{-}8$$

式 1-8 で $\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}=LC$ から

$$\therefore\quad ec(t)=V1\left(1-e^{-\alpha t}\left(\cosh\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sinh\beta t\right)\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 1\text{-}9$$

となる。

$\beta<0$ の場合には $\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=\beta=j\omega 1$ ， $\omega 1=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ また $\alpha=\frac{R}{2L}$ から，式 1-9 は

$$ec(t)=V1\left(1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega 1t+\frac{\alpha}{\omega 1}\sin\omega 1t\right)\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 1\text{-}10$$

となる。
式 1-10 は，$e^{-\alpha t}$ の包絡線に沿って角周波数 ω1 で減衰振動し，定常値 V1 に向かって収束する波形となることを表している。

【具体例】

V1=1 V（直流電源）， $\alpha=12\,500$ ， $\omega 1=3.737\,1\times10^{6}$ ， 初動時の $t=1\ \mu s$ を式 1-13 に代入して

$$ec(t)=1\times\left[1-e^{-12\,500\times1\times10^{-6}}\left(\cos(3.737\,1\times10^{6}\times1\times10^{-6})+\frac{12\,500}{3.737\,1\times10^{6}}\sin(3.737\,1\times10^{6}\times1\times10^{-6})\right)\right]=\left[1-0.987\,6\times\left(-0.827\,8+0.003\,3\times(-0.561)\right)\right]\fallingdotseq 1.82\ \mathrm{V}$$

注）cos( )，sin( )の( )内はラジアンなので，度(degree）に変換し，有効桁数を多くして算出する。

結果， **1 V を定常値として約 2 倍の過渡電圧が発生**する(Fig.1-6)。

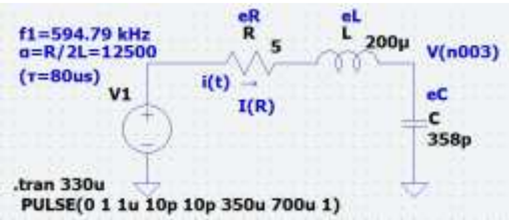


Fig.1-5 R-L-C 直列回路（V1＝ 1 V）

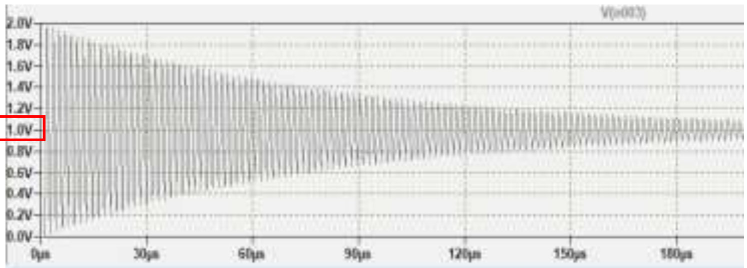


Fig.1-6 R-L-C 直列回路 ec(t)の過渡応答

以下に V1 から eC までのブロック線図の作成経過を示す。

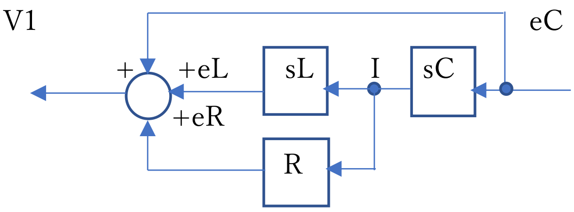


Fig.1-7

① $\frac{1}{C}\int i(t)dt=eC$ から，eC を微分するとキャパシタに流れる電流が得られる。

② I× s L＝eL，I×R＝eR を eC と加算すると電源電圧 V1 が得られる。

この様子を Fig.1-7 に示す。

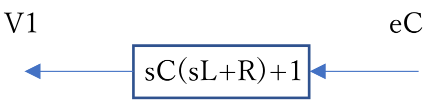


Fig.1-8

③ eL と eR を加算して sC を掛算したものに eC を加えると V1 となる。

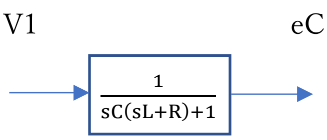


Fig.1-9

④ V1 から eC へと線図を逆転する。

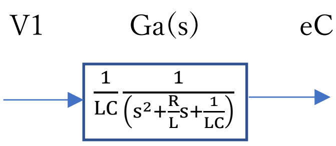


Fig.1-10

⑤ V1 から eC への伝達関数 Ga(s)を得る。

分母を因数分解して

$$s1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^{2}-\frac{1}{LC}}\ ,\ s2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^{2}-\frac{1}{LC}}$$

また， $(s-s1)(s-s2)\ \rightarrow\ \left(s-(-\alpha+\beta)\right)\left(s-(-\alpha-\beta)\right)$

から式 1-7 を得る。